Document sur MégaMaths

Compte rendu d'oral de Philippe Auria

(Leçon sur les suites à l'oral 2 de 2012)

1 Introduction

Quand on sort d'une épreuve orale, on se rappelle de certains épisodes mais on a bien du mal à deviner comment le jury nous a perçus et quel sera son jugement. L'impact réel de sa prestation reste inconnu. Dans le texte suivant, Philippe Auria sait qu'il a répondu à énormément de questions, mais en sortant de la salle, ne se souvient que de ses échecs et de ses manques. Le goût est amer. Pourtant le jury a relevé des points très positifs dans son exposé et pendant son entretien, et avait trouvé son exercice bien choisi. Le candidat avait montré des qualités d'écoute et répondait honnêtement, en raisonnant, et en faisant des mathématiques. Dans le texte qui suit, je me suis contenté d'adapter la forme du compte rendu fait par Philippe en rajoutant quelques précisions pour le rendre plus facile à lire et à comprendre.

2 Compte rendu

► Je suis admis au CAPES. J'ai obtenu 17,81/20 à l'écrit (j'ai passé seulement la première épreuve écrite car il s'agit du 3e concours), et 12/20 à l'oral 2 (le seul que je devais passer) avec 8/12 pour l'exercice et 4/6 pour l'épreuve *Agir en fonctionnaire.*

J'avais pourtant l'impression d'avoir raté mon oral sur les suites avec utilisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Je suis passé totalement à côté de l'exercice du jury et j'ai donné une analyse de la réponse de l'élève qui était en partie erronée, comme le jury me l'a fait remarquer. Ma simulation de la conjecture sur la suite sur le logiciel ne fonctionnait pas, bref tout était faux. Et je n'ai même pas réussi à trouver la limite l qui vérifiait $f(l) = l$ dans la partie à corriger destinée à une classe de TS.

Les examinateurs m'ont posé un nombre incalculable de questions sur tout et j'avais l'impression de répondre des âneries à chaque fois. Ils m'ont quand même bien aidé, et j'ai surtout écouté ce qu'ils me demandaient, et même dit plusieurs fois que je ne comprenais pas la question, de sorte qu'ils la reformulaient toujours gentiment.

► Par contre, j'ai proposé un exercice original qu'ils ne connaissaient pas sur la limite de la somme des surfaces et des périmètres d'une rosace faite de cercles de rayons les n cordes d'un grand cercle de rayon 1 découpé en n secteurs angulaires d'angle $2\pi/n$. Il fallait utiliser Al-Kashi puis arriver à deux suites à encadrer pour trouver les limites (voir Section 3). L'inspecteur m'a dit qu'intuitivement la surface tendait vers 0 et le périmètre vers 2π, or ce dernier tendait vers $4\pi^2$. J'ai répondu que l'intuition, c'était une bonne chose, mais qu'une démonstration par le calcul, c'était mieux, et qu'il fallait se méfier. J'avais choisi cet exercice justement pour montrer les limites de l'intuition lorsqu'il s'agissait de limites à l'infini, en plus de montrer que des encadrements permettaient de conclure, et que l'on n'allait pas toujours avoir la chance de traiter des convergences monotones comme dans l'exercice proposé dans le dossier. Cet exercice du dossier s'intéressait d'ailleurs à une suite décroissante minorée que je n'étais pas arrivé à minorer, car je n'avais pas noté que la minoration était pratiquement donnée dans l'énoncé.

[0] [d120629] Proposé le 29/06/2012 - Extrait de questions01
© 2012, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel

Dans des classes supérieures, je pouvais imaginer commencer par demander de montrer le résultat sur la puissance d'un point par rapport à un cercle, puis demander de l'utiliser pour prouver la formule d'Al-Kashi, et enfin demander de travailler sur les sommes des périmètres et des aires déterminés par ces petits cercles sans donner immédiatement l'encadrement de $\sin x$.

▶ Un examinateur m'a fait remarquer que le Théorème d'Al-Kashi n'était plus au programme, et demandé comment je démontrerais ce résultat sans avoir recours au produit scalaire. J'ai dit que j'utiliserais la puissance d'un point par rapport à cercle dans le cadre d'un TD. Cela a surpris car il y avait plus simple. J'ai dit oui, mais la démonstration que je proposais était un réinvestissement de connaissances bien diverses et appelait à un synthèse de plusieurs notions : angles, Théorème de Pythagore, produit scalaire ou relations trigonométriques dans le triangle rectangle, donc était plus complet, et tellement plus élégant. En plus, pour moi, les mathématiques restaient quand même l'art de la démonstration[1].

▶ Mon deuxième exercice portait sur la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$, qui est croissante majorée donc convergente. Ce choix a été fait pour manier les sigmas et surtout trouver une majoration astucieuse très utilisée dans les études supérieures et les concours des grandes écoles.

Une examinatrice m'a demandée comment je ferais pour majorer cette suite, peut-être parce que je n'avais pas vu la minoration dans l'exercice du jury, et je lui ai répondu sur le champ que :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

pour tout entier $k \geq 2$, et donc que les termes $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ étaient majorés par 2. L'examinatrice m'a arrêté et m'a dit que ça allait.

L'interrogation sur les exercices n'a duré que moins de deux minutes et encore, peut-être parce que le jury considéré que je les maitrisais suffisamment contrairement au reste ?

▶ Pour la partie *Agir en fonctionnaire de l'état*, j'avais perdu tellement de temps sur la recherche de la minoration et de la limite de la suite (qui étaient évidente, mais où je m'étais empêtré) que je suis arrivé devant le jury en découvrant pratiquement le sujet :

> « Vous êtes professeur principal, et un élève baisse les bras depuis quelques temps avec des résultats en chute libre et des absences répétées. Que faites-vous ? »

J'ai été honnête j'ai dit que je n'avais pas eu le temps de préparer cette partie, mais que j'avais des idées claires dans ma tête sur ce type de problème.

J'ai expliqué qu'il fallait d'abord en parler avec l'équipe pédagogique pour voir si ce problème était relevé dans d'autres disciplines ou pas, puis j'ai enchaîné en disant que si l'élève ne voulait pas expliquer de lui-même pourquoi il se décourageait, la solution serait difficile à mettre en œuvre puisqu'on ne pourrait que soigner des symptômes. On pouvait cependant prévenir les parents, les assistantes sociales, les psychologues, sans oublier l'administration pour les problèmes d'absences non justifiées.

Un examinateur m'a demandé de dire qu'elles étaient les causes possibles pour ce manque d'intérêt. J'ai répondu par toute une litanie de raisons probables, en précisant qu'il y en avait vraiment trop pour que l'on puisse se faire une idée précise de la réalité. Il pouvait par exemple y avoir eu un décrochage si l'élève s'était senti en échec sur une matière qu'il considérait comme importante, et être ainsi en souffrance, comme moi quand je cherchais la minoration dans l'exercice

[1] On trouvera plusieurs preuves d'Al Kashi qui évitent le produit scalaire, dont une qui fait intervenir la puissance d'un point par rapport à cercle, dans le recueil de questions [1] et dans un autre livre où je compte rassembler des brèves intéressantes de mathématiques.

du jury pendant une heure alors qu'elle était pratiquement donnée par l'énoncé : gros rire de l'ensemble du jury et de moi-même.

► Le jury m'a enfin demandé pourquoi je voulais devenir professeur de mathématiques. Je lui ai dit ma passion. Je leur ai aussi dit que le métier de professeur évoluait vers un métier de management d'équipes pédagogiques, avec un travail de coordination et de synthèse que je pratique déjà au quotidien en tant qu'ingénieur et directeur d'usine. Et puis, je ne devais pas oublier que le Théorème de Thalès m'avait sauvé la vie[2].

Je suis sorti avec l'impression d'avoir raconté des bêtises énormes, et j'ai prévenu mon entourage qu'il fallait faire une croix sur ma réussite au CAPES cette année. Et puis surprise : je suis admis !

3 Exercice proposé par le candidat

Soit un cercle de centre O et de rayon 1. On découpe le cercle en n rayons délimitant des angles de $2\pi/n$. Puis on trace les cordes entre chaque point successif d'intersection entre les rayons et le cercle. On trace ensuite tous les petits cercles de centres les points d'intersection des rayons et du grand cercle, et de rayon la corde correspondante (voir FIG. 1 quand $n = 5$).

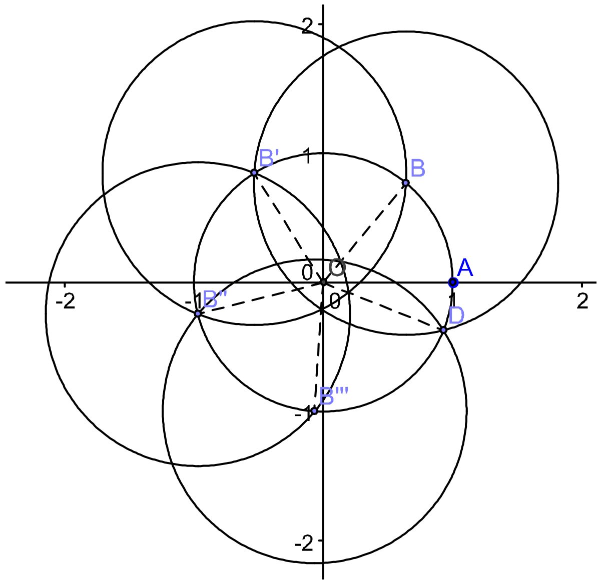

FIG. 1 – Cas où $n = 5$

On demande de :

1) Conjecturer des limites possibles pour la somme des périmètres des petits cercles et la somme des aires des disques qu'ils définissent.

2) Trouver ces limites sachant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

[2]Lors d'un naufrage, le candidat avait réussi à attirer les secours en mer au bon endroit en utilisant le Théorème de Thalès. Cet épisode est relaté sur les pages du site MégaMaths.

Solution — Notons r les rayons des petits cercles, variables en fonction de n. Le Théorème d'Al-Kashi donne :

$$r^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{2\pi}{n} = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) = 4\sin^2\frac{\pi}{n}$$

d'où :

$$r = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

puisque $r > 0$. Le périmètre d'un cercle est :

$$P_n = 2\pi r = 4\pi\sin\frac{\pi}{n}$$

et le périmètre de n cercles sera $nP_n = 4n\pi\sin(\pi/n)$. De :

$$\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}\right) \leq \sin\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n}$$

on tire :

$$4\pi^2 - \frac{2\pi^4}{3n^2} \leq nP_n = 4n\pi\sin\frac{\pi}{n} \leq 4\pi^2$$

de sorte que $\lim(nP_n) = 4\pi^2$. Comme l'a dit l'inspecteur général, l'intuition voudrait que les cordes se résument à un point et que la somme des périmètres tende vers le périmètre du grand cercle, soit 2π, ce qui n'est pas le cas. Notons S_n l'aire d'un petit disque. La somme des aires des n disques sera :

$$nS_n = n\pi r^2 = 4n\pi\sin^2\frac{\pi}{n},$$

et :

$$\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}\right)^2 \leq \sin^2\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^6}{36n^6} - \frac{\pi^4}{3n^4} \leq \sin^2\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^2}{n^2}$$

$$4\frac{\pi^3}{n} + \frac{\pi^7}{9n^5} - \frac{4\pi^5}{3n^3} \leq nS_n \leq \frac{4\pi^3}{n},$$

donc $\lim(nS_n) = 0$. La somme des aires tend vers 0 comme l'intuition le suggère.

Références

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. VI : cuvée spéciale, un brin d'analyse, de géométrie et de probabilités, Publibook, à paraître.